1 Varianta A

Př.1. Zlomek $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2^2}}$ je roven číslu:
a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt[3]{2}$, c) $\sqrt[6]{2}$, d) 1, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Odmocninu lze vždy vyjádřit jako mocninu se zlomkovým exponentem. A pro práci s mocninami již máme jednoduchá pravidla. Výpočet:

$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{(2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{(2^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = 2^0 = 1$$

Při výpočtu jsme užili následujících pravidel (platí samozřejmě oběma směry, nejen zleva doprava!):

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$(x^n)^m = x^{n\cdot m}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Př.2. Výraz $\log_2\sqrt{2} - \log_2\sqrt[4]{2^3} + \log_2\sqrt[4]{2^5}$ je roven číslu:
a) 0, b) 1, c) -1, d) $\frac{1}{2}$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Odmocniny vyjádříme ve tvaru mocnin. Pak užijeme vztahy pro logaritmus mocniny. Výpočet:

$$\log_2\sqrt{2} - \log_2\sqrt[4]{2^3} + \log_2\sqrt[4]{2^5} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} - \log_2 2^{\frac{3}{4}} + \log_2 2^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 1$$

Při výpočtu jsme užili jen definice logaritmu:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y,$$

ze které plyne

$$log_a a^y = y.$$

Př.3. Všechna reálná řešení rovnice $(\frac{1}{2})^{x-1} = 4$ náleží intervalu:
a) $(-4,-3)$, b) $\langle -3,-1)$, c) $\langle -1,2)$, d) $\langle 2,4)$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Převedeme obě strany na společný základ:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 4 = 2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Jelikož je exponenciální funkce prostá, musí platit rovnost argumentů:

$$\begin{aligned} x-1 &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Př.4. Číslo $\log_4 32$ je rovno číslu:
a) $\frac{3}{2}$, b) $\frac{5}{2}$, c) $\frac{2}{5}$, d) $\frac{2}{3}$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Z definice logaritmu víme, že $\log_4 32 = x$ je ekvivalentní s $4^x = 32$. Dostáváme tedy exponenciální rovnici, kterou vyřešíme převedením na společný základ :

$$\begin{aligned} 4^x &= 2^5 \\ (2^2)^x &= 2^5 \\ 2^{2x} &= 2^5 \\ 2x &= 5 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Př.5. V aritmetické posloupnosti je dán n-tý člen $a_n = \frac{6n+5}{7}$. Člen a_{n+1} je:
a) $a_{n+1} = \frac{6n+8}{7}$, b) $a_{n+1} = \frac{6n+9}{7}$, c) $a_{n+1} = \frac{6n+10}{7}$, d) $a_{n+1} = \frac{6n+11}{7}$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Zadáním je určen obecný předpis (jak spočíst libovolný člen). Stačí tedy dosadit n+1 za n do tohoto předpisu:

$$a_{n+1} = \frac{6(n+1)+5}{7} = \frac{6n+11}{7}$$

Př.6. Číslo $[\sin \frac{25\pi}{6} - \cos \frac{13\pi}{3}]$ se rovná číslu:
a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Funkce sinus i cosinus jsou periodické s periodou 2π, a tedy se jejich hodnota při odečtení libovolného násobku 2π v argumentu nezmění:

$$\sin \frac{25\pi}{6} - \cos \frac{13\pi}{3} = \sin\left(\frac{25\pi}{6} - 4\pi\right) - \cos\left(\frac{13\pi}{3} - 4\pi\right) = \sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Př.7. Maximálním definičním oborem funkce $f(x) = \sqrt{1 - \log_4 x}$ je množina:
a) $\langle 1, 4)$, b) $\langle 1, 4\rangle$, c) $(0, 4\rangle$, d) $(0, 4)$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Při určování definičního oboru zaměříme pozornost na "kritické operace". Ve funkčním výrazu se objevují dvě: odmocňování (argument musí být nezáporný, aby byla druhá odmocnina definovaná) a logaritmus (argument musí být kladný). Dostáváme tedy právě dvě podmínky, které jsou nutné a postačující pro to, aby byla hodnota funkce $f(x) = \sqrt{1 - \log_4 x}$ definována:

- Kvůli odmocnině: $1 - \log_4 x \geq 0$, tedy $x \leq 4$
- Kvůli logaritmu: $x > 0$

Definiční obor je tedy průnikem množin daných výše uvedenými podmínkami:

$$D(f) = (-\infty, 4\rangle \cap (0, \infty) = (0, 4\rangle$$

Př.8. Všechna reálná řešení rovnice $2^{x+1} + 2^x - 3 = 0$ náleží intervalu:
a) $\langle -4, -2)$, b) $\langle -2, 0)$, c) $\langle 0, 2)$, d) $\langle 2, 4)$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: V rovnici se narozdíl od příkladu 3. vyskytují dva různé členy obsahující neznámou x. Tyto tedy zkusíme nejdříve sjednotit, a poté již převedeme mocninné výrazy na společné základy jako ve jmenovaném příkladě:

$$2^{x+1} + 2^x - 3 = 2 \cdot 2^x + 2^x - 3 = 3 \cdot 2^x - 3 = 3 \cdot (2^x - 1) = 0, \text{ odtud}$$

$$
\begin{aligned}
2^x &= 1 = 2^0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Poznámka: Pokud se nedaří aplikovat uvedený postup, může jít o příklad analogický typovému příkladu 13 ve variantě B, viz níže.

Př.9. Počet všech kořenů rovnice $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$ v intervalu $(0, 2\pi\rangle$ je roven číslu:
a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Tento příklad je nástraha neboli chyták. Obor hodnot funkce sinus je $\langle -1, 1\rangle$. Proto nemůže sinus **žádného** argumentu nabýt hodnoty $\frac{\pi}{2} \doteq 1,67$. Neexistuje tedy žádné x vyhovující dané rovnici.

Př.10. Absolutní hodnota (resp. velikost) komplexního čísla $z = (1 + 2i)(3 - 2i)$ je reálné číslo, které je prvkem intervalu:
a) $\langle 0, 4)$, b) $\langle 4, 8)$, c) $\langle 8, 12)$, d) $\langle 12, 16)$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Velikost komplexního čísla je určena jako $\mid (a + bi) \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$. Upravíme tedy zadaný součin do základního tvaru a pak jen spočteme odmocninu ze součtu čtverců.

$$
|(1 + 2i)(3 - 2i)| = |3 - 2i + 6i - 4i^2| = |7 - 4i| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} \doteq 8.1
$$

Nezapomeňme, že $i^2 = -1$!

Př.11. Počet všech reálných řešení goniometrické rovnice $2\cos^2 x = \cos x$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ je roven číslu:
a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Zavedeme-li substituci $\cos x = y$, budeme nejprve řešit kvadratickou rovnici pro neznámou y a poté dopočítáme odpovídající x:

$$
\begin{aligned}
2y^2 &= y \\
2y^2 - y &= 0 \\
2y(y - 1) &= 0, \text{ odtud} \\
\text{buď } y &= 1 \text{ a pak: } \cos x = 1 \Rightarrow x \in \{0, 2\pi\}, \\
\text{nebo } y &= 0 \text{ a pak: } \cos x = 0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}
\end{aligned}
$$

Celkem jsme tedy nalezli čtyři řešení v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Poznámka: Kdyby byl v zadání interval $(0, 2\pi)$, byla by v tomto intervalu jen dvě řešení!

Poznámka: princip substituce tu spočívá v tom, že se nejprve dopátráme, čemu se musí rovnat $(\cos x)$ jako celek, aby rovnice platila, přičemž nehledíme na vnitřní strukturu substituovaného výrazu. Teprve ve druhém kroku se zajímáme o samotnou proměnnou x, v té chvíli již o něm ovšem máme k dispozici informace v jasnější formě, totiž známe hodnotu výrazu $\cos x$. Z ní není těžké hodnotu x zjistit.

Př.12. Všechna reálná řešení rovnice $2^{\log_{\frac{1}{2}} x} = \frac{1}{4}$ náleží intervalu:
a) $(3, 5)$, b) $(1, 3)$, c) $(-1, 1)$, d) $(-3, -1)$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Zavedeme-li substituci $\log_{\frac{1}{2}} x = y$, budeme nejprve řešit jednoduchou exponenciální rovnici pro neznámou y a poté dopočítáme odpovídající x:

$$\begin{aligned} 2^y &= \frac{1}{4} = 2^{-2} \\ y &= -2, \text{ dosadíme do substituce} \\ \log_{\frac{1}{2}} x &= -2 \\ x &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \end{aligned}$$

Př.13. Uvažujme reálnou funkci f jedné reálné proměnné definovanou předpisem

$$f(x) = x^2 - 3x.$$

Množina všech reálných čísel a, pro která platí

$$f(a) - f(a-2) < 10,$$

je rovna množině:
a) $(-\infty, 5)$, b) $(5, \infty)$, c) $(-5, \infty)$, d) $(-\infty, -5)$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Nececháme se zmást šroubovaností zadání a statečně dosadíme za x v jednom případě a a v druhém $a-2$. Hrubou silou vypočítáme:

$$f(a) - f(a-2) = [a^2 - 3a] - [(a-2)^2 - 3(a-2)] = a^2 - 3a - [a^2 - 4a + 4 - 3a + 6] = 4a - 10.$$

Dále zbývá jen dořešit snadnou nerovnici:

$$\begin{aligned} 4a - 10 &< 10 \\ 4a &< 20 \\ a &< 5 \end{aligned}$$

Př.14. Goniometrický (resp. polární) tvar komplexního čísla $z = \frac{4-3i}{7+i}$ lze napsat takto:
a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$,
b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$,
c) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$,
d) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$,
e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Naším úkolem je tedy upravit zadané číslo do tvaru $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Nejprve tedy spočteme velikost z, tj. $|z|$, pak ji vytkneme z čísla z a nakonec najdeme vhodný "argument komplexního čísla", tj. φ. Abychom ovšem mohli spočíst velikost předhozeného komplexního čísla (je ve tvaru zlomku), musíme užít fintu s rozšířením zlomku výrazem komplexně sdruženým ke jmenovateli. Sledujte:

$$z = \frac{4-3i}{7+i} = \frac{4-3i}{7+i}\frac{7-i}{7-i} = \frac{28-4i-21i+3i^2}{49-i^2} = \frac{25-25i}{50} = \frac{1-i}{2} = \text{ vytkneme velikost } = \left|\frac{1-i}{2}\right| \frac{1-i}{2\left|\frac{1-i}{2}\right|}.$$

Spočteme:

$$\left|\frac{1-i}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dosadíme do minulé rovnice:

$$z = \frac{4-3i}{7+i} = \left|\frac{1-i}{2}\right| \frac{1-i}{2\left|\frac{1-i}{2}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-i}{2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Zbývá zjistit, pro jaké φ je

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Je možné postupovat například takto: má být

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1,$$

odtud

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Dostáváme tedy:

$$z = \frac{4-3i}{7+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Př.15. Uvažujme exponenciální funkci $f(x) = (\frac{m-1}{m})^x$, kde x je reálná proměnná a m je reálný parametr. Množina všech hodnot parametru m, pro které je uvedená exponenciální funkce rostoucí, je rovna množině:
a) $(-\infty, 0)$, b) $(0, \infty)$, c) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, d) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

Řešení: Upamatujeme se, že exponenciální funkce je rostoucí právě když její základ je větší než jedna (stejně je tomu u funkce logaritmické). Stačí tedy vyřešit elementární nerovnici:

$$\begin{aligned}
\frac{m-1}{m} &> 1 \\
1 - \frac{1}{m} &> 1 \\
-\frac{1}{m} &> 0 \\
\frac{1}{m} &< 0 \text{ násobili jsme záporným číslem nerovnost - otočilo se znaménko} \\
m &< 0
\end{aligned}$$